

Задача 5.1. По данным о средних потребительских ценах на муку в Ставропольском крае за 2011-2013 гг. (таблица 5.1) оцените прогнозные уровни цен на 4 квартала 2014 г. Для этого постройте мультипликативную модель тренда и сезонности.

Выбор вида аппроксимирующей функции произведите на основании показателей детерминации из следующих функций:

- а) линейная: $Y_t = a + bt$;
- б) полиномиальная второй степени: $Y_t = a + bt + ct^2$;
- в) полиномиальная третьей степени: $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$;
- г) логарифмическая: $Y_t = a + b \ln t$;
- д) степенная: $Y_t = at^b$.

Таблица 5.1 – Средние потребительские цены на муку, руб./кг

Год	Квартал	Цены на муку, руб./кг
2011	1	22,55
	2	23,01
	3	22,41
	4	21,22
2012	1	21,77
	2	22,52
	3	23,89
	4	27,49
2013	1	26,77
	2	27,41
	3	26,81
	4	25,33

Решение.

Для решения задачи удобно использовать средства MS Excel.

Мультипликативная модель тренда имеет вид: $Y = Y_t \cdot I_s$, где

Y_t – долговременная составляющая (тренд);

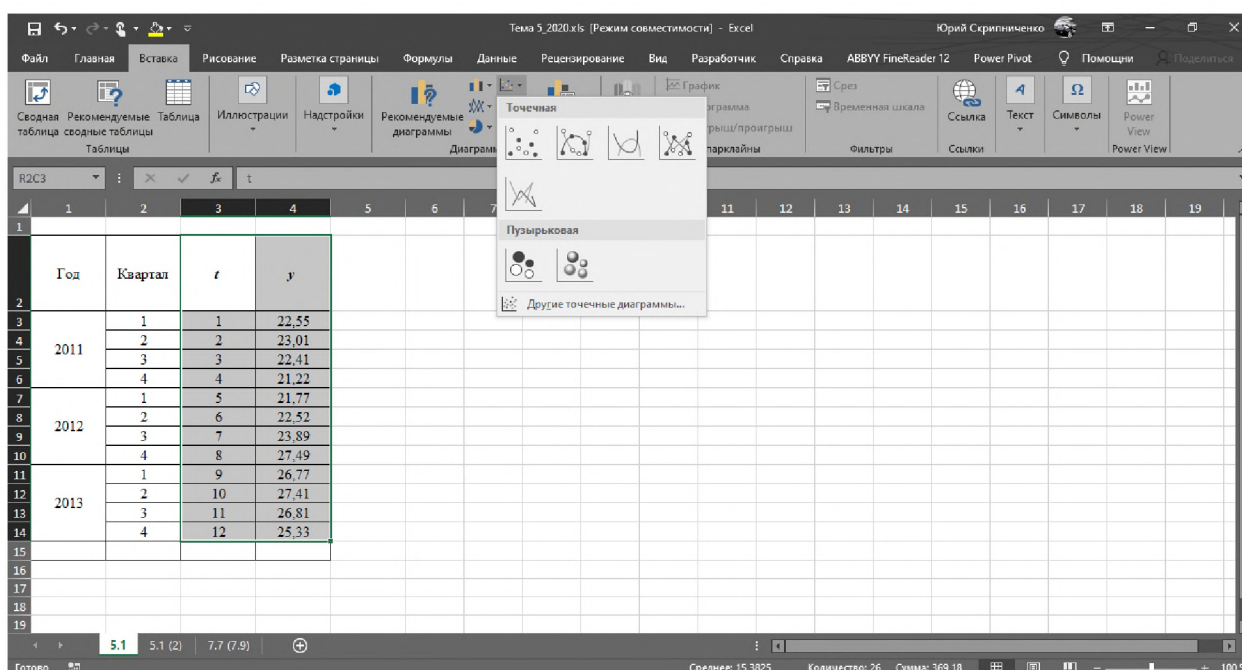
I_s – индексы сезонности, характеризующие среднее относительное отклонение показателя в соответствующем месяце.

Для того, чтобы иметь представление о наличии или отсутствии этих компонент изобразим исходные данные на рисунке.

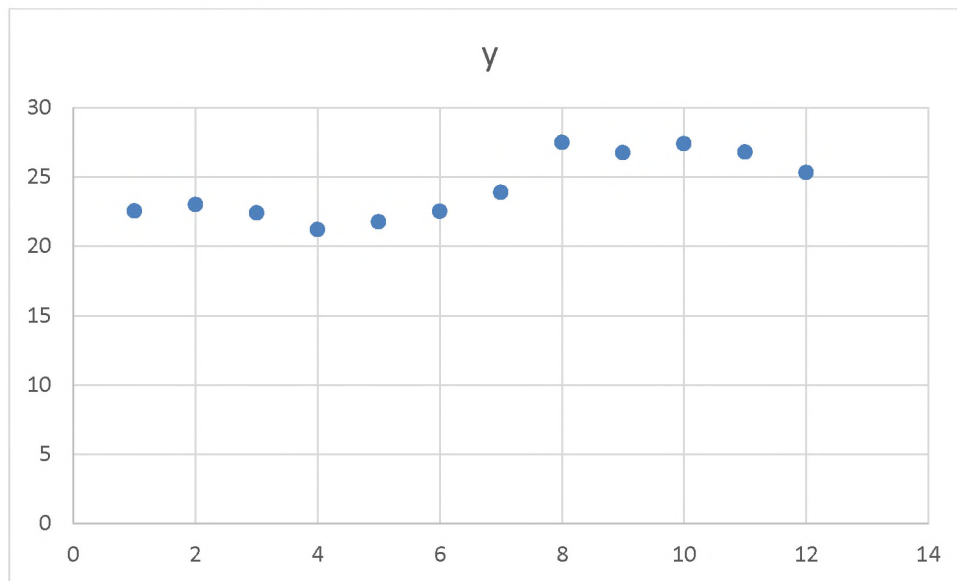
Для построения диаграммы в Excel дополним исходные данные столбцом условного обозначения кварталов t :

Год	Квартал	t	y
2011	1	1	22,55
	2	2	23,01
	3	3	22,41
	4	4	21,22
2012	1	5	21,77
	2	6	22,52
	3	7	23,89
	4	8	27,49
2013	1	9	26,77
	2	10	27,41
	3	11	26,81
	4	12	25,33

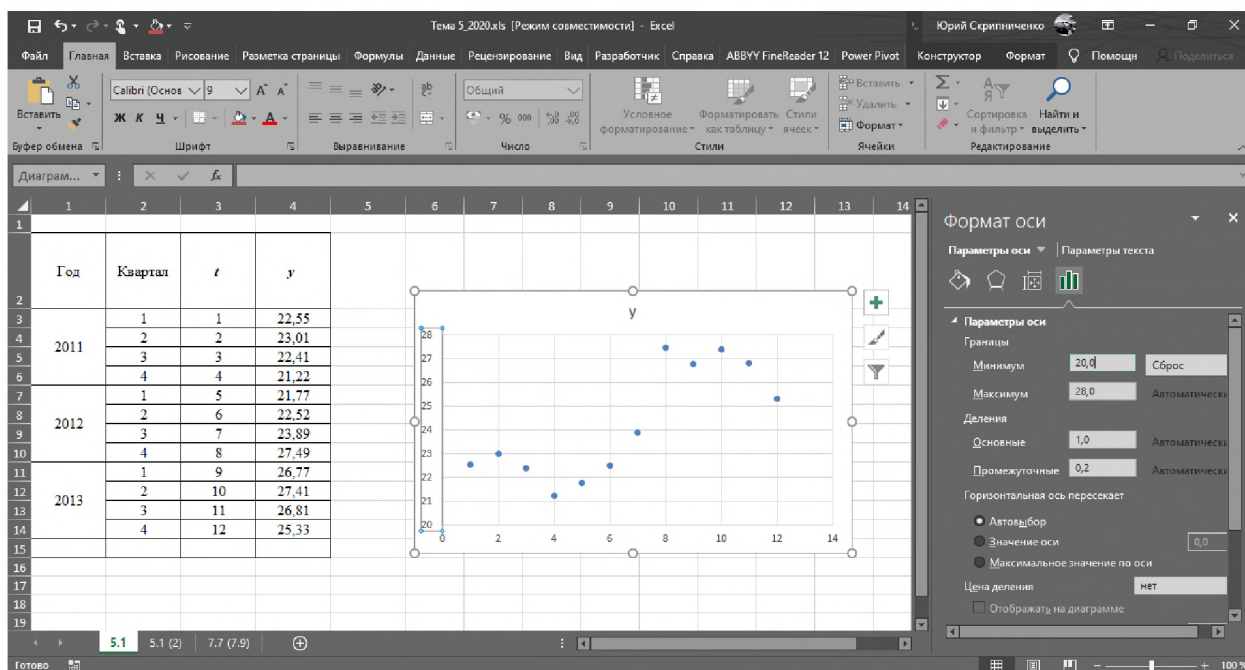
На рисунке показано применение инструмента «Точечная диаграмма»:



В результате получим диаграмму:



В этом случае можно отметить в качестве минимального значения оси y значение $y = 20$:

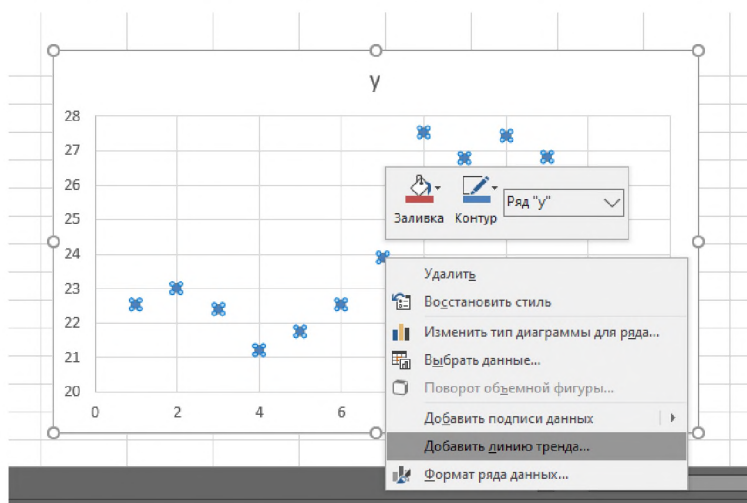


По диаграмме можно сделать вывод о наличии восходящего тренда, а также о колебаниях потребительских цен на муку, происходящих в отдельных кварталах.

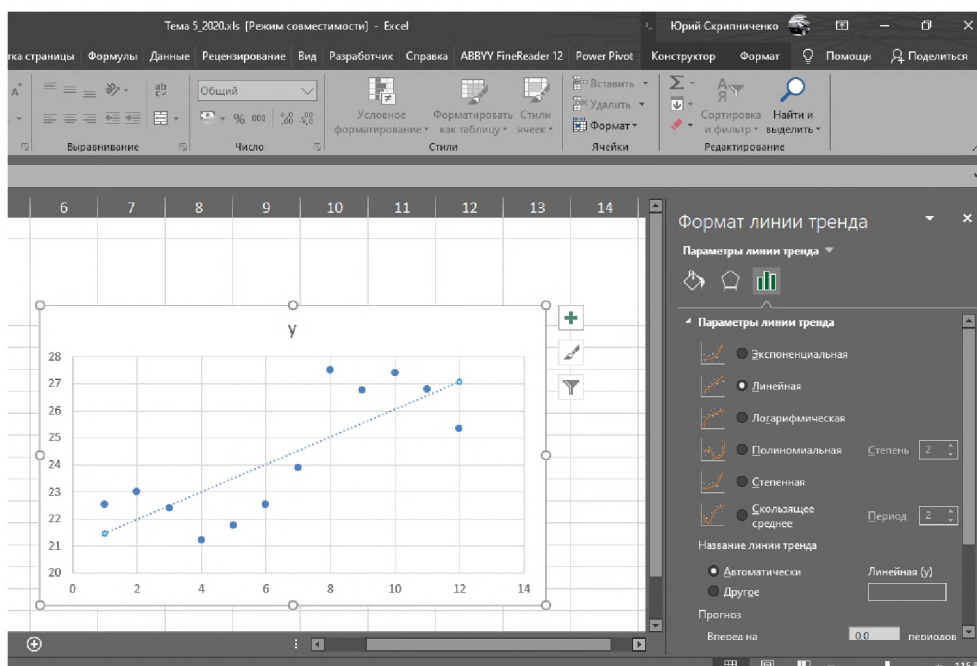
Начнем поиск оптимальной для этого случая модели тренда.

а) линейная функция: $Y_t = a + bt$.

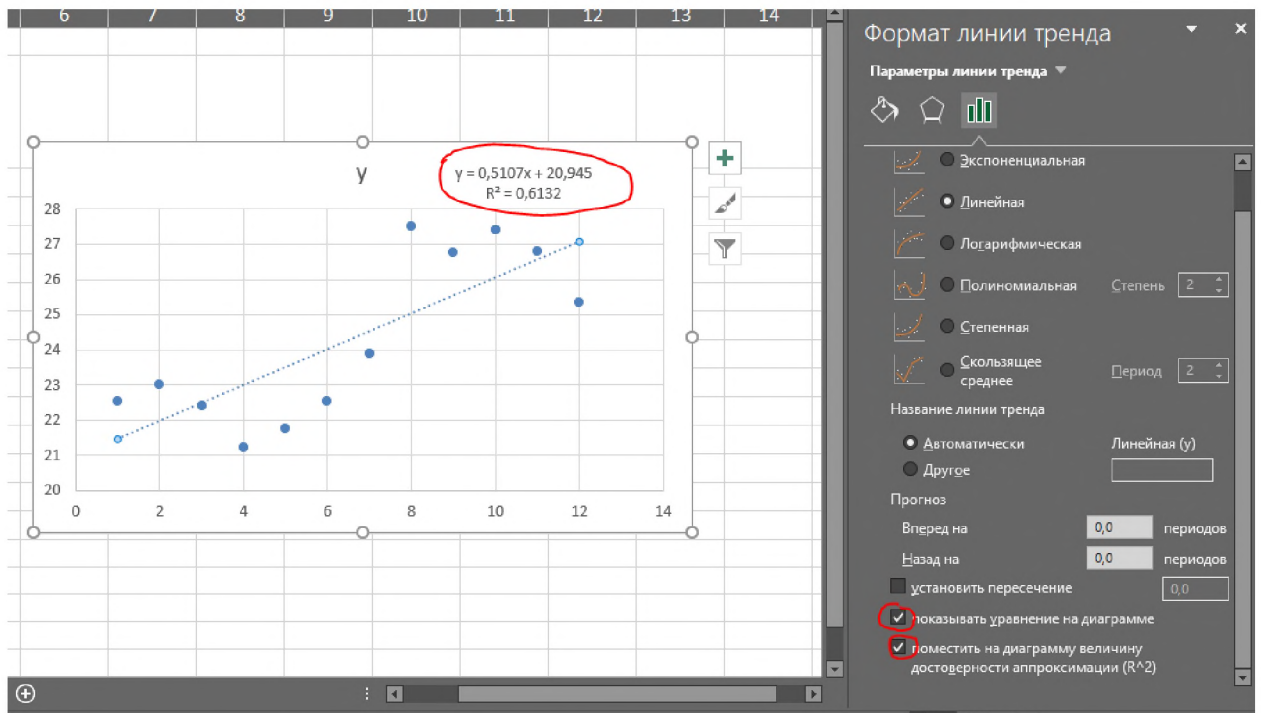
Используя средства Excel, можно определить параметры линейного тренда в диаграмме. Для этого в любой точке диаграммы нажмем правую кнопку мыши (ПКМ) и выберем пункт «Добавить линию тренда»:



В результате по умолчанию будет построен линейный тренд:



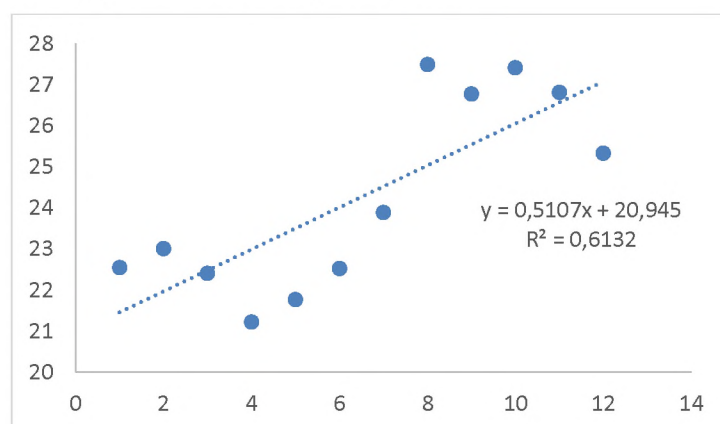
Нас интересуют параметры этой линии, а также статистические меры корректности. Чтобы отобразить эти величины, необходимо отметить два пункта внизу поля построения линии тренда, как показано на рисунке. Тогда на диаграмме отобразится уравнение тренда и мера корректности (коэффициент детерминации R^2):



С точки зрения количественного подхода к спецификации модели тренда из предложенных линий тренда следует выбирать ту, которая характеризуется максимальным уровнем коэффициента детерминации.

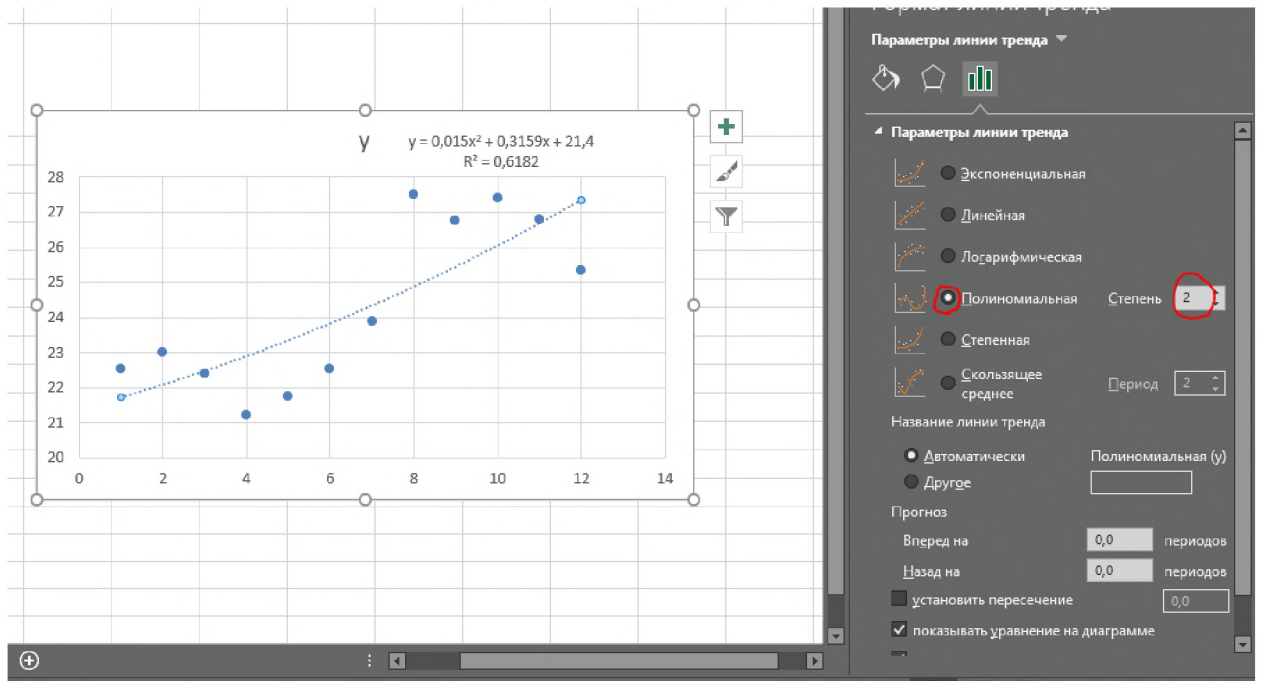
Следует помнить, что статистические меры корректности позволяют оценивать степень приближения линии тренда лишь на ретроспективном материале и не позволяют с полной уверенностью судить о поведении процесса в будущем. Поэтому стоит применять наряду с количественным подходом проводить также и качественный анализ предмета прогнозирования, применяя знания о свойствах тех или иных функций (лекция 5).

Линейная функция в результате имеет вид: $y_t = 20,945 + 0,5107 \cdot t$. Линейный тренд описывает изменение цен на муку на 61,32%, о чем свидетельствует коэффициент детерминации:

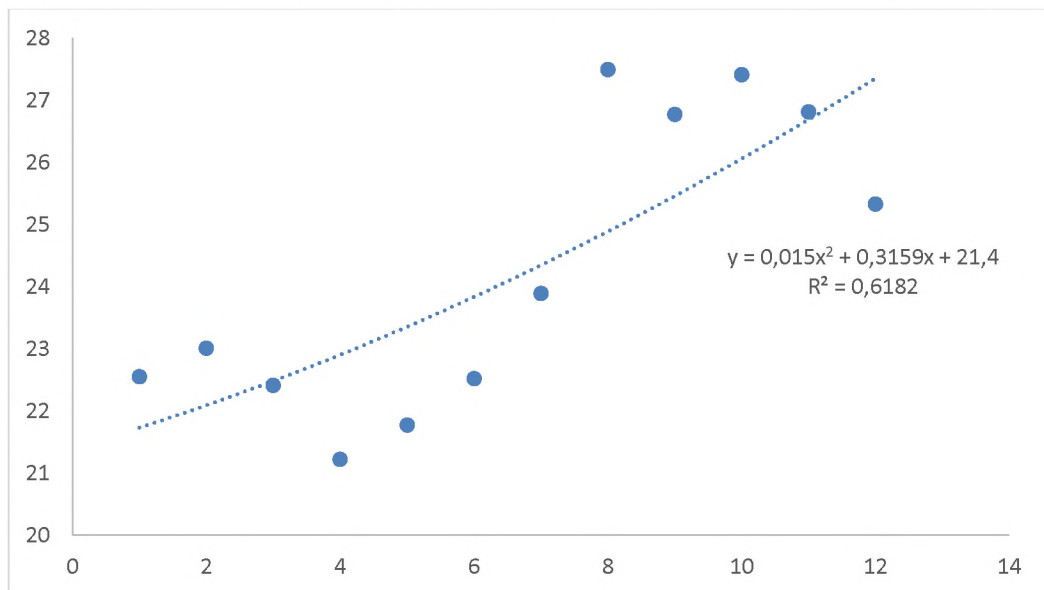


б) полиномиальная второй степени: $Y_t = a + bt + ct^2$.

Для оценки параметров полинома 2 степени поставим отметку в поле построения линии тренда – «Полиномиальная», степень «2»:



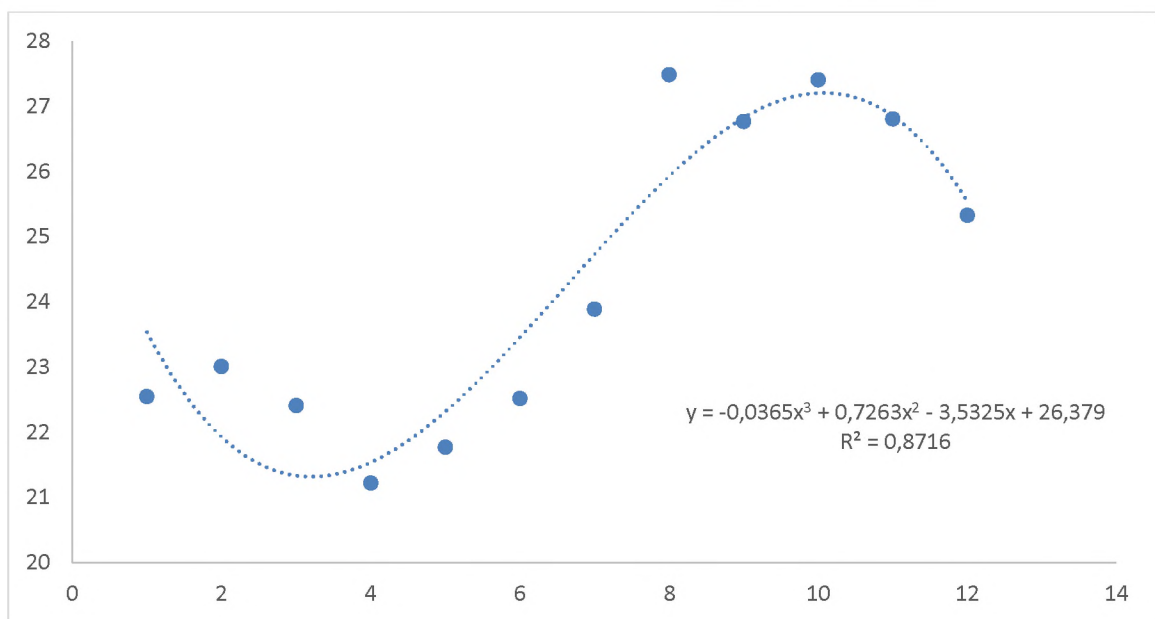
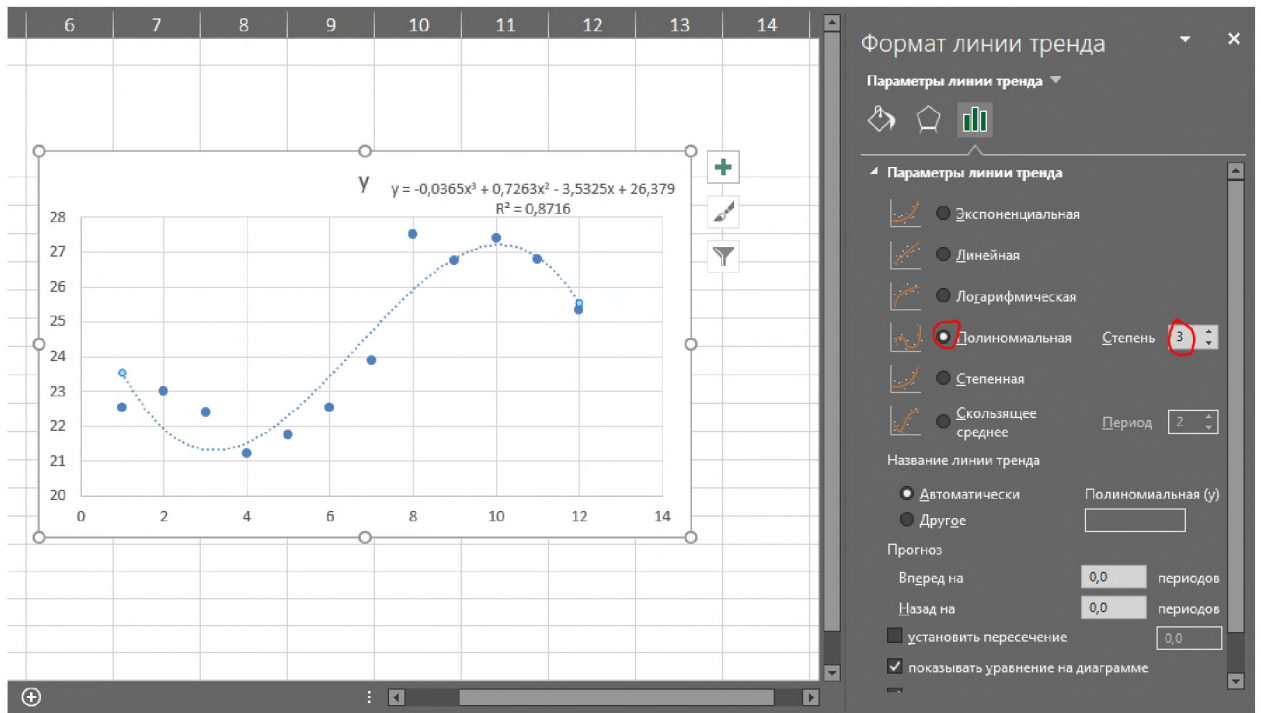
Получим функцию: $y_t = 21,4 + 0,3159 \cdot t + 0,015 \cdot t^2$; $R^2 = 0,6182$:



в) полиномиальная третьей степени: $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$.

Для оценки параметров полинома 3 степени поставим отметку в поле построения линии тренда – «Полиномиальная», степень «3».

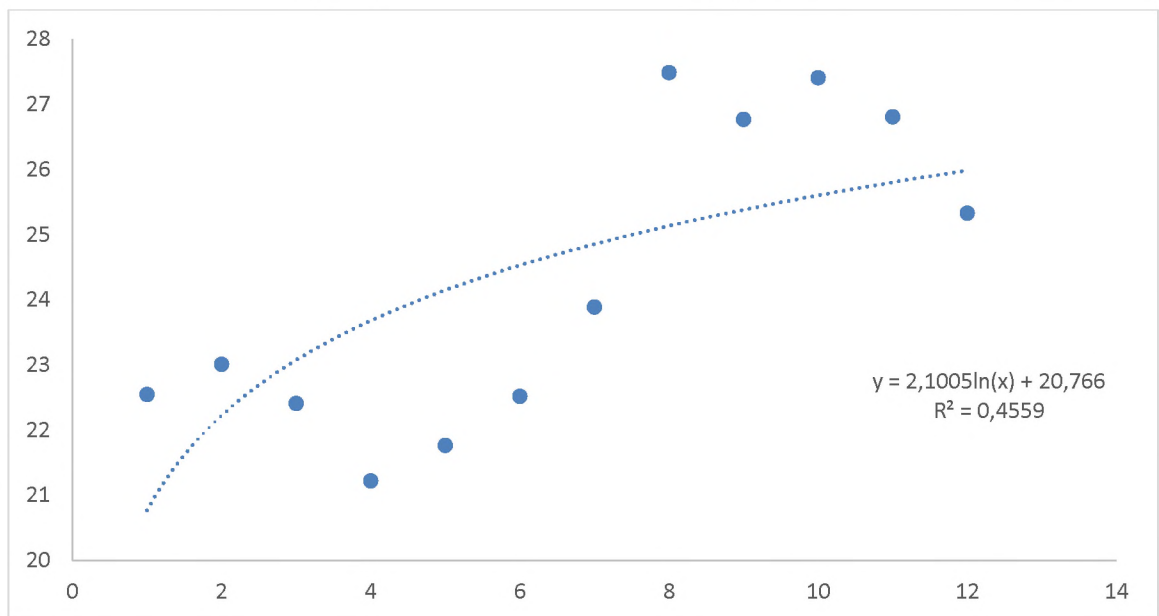
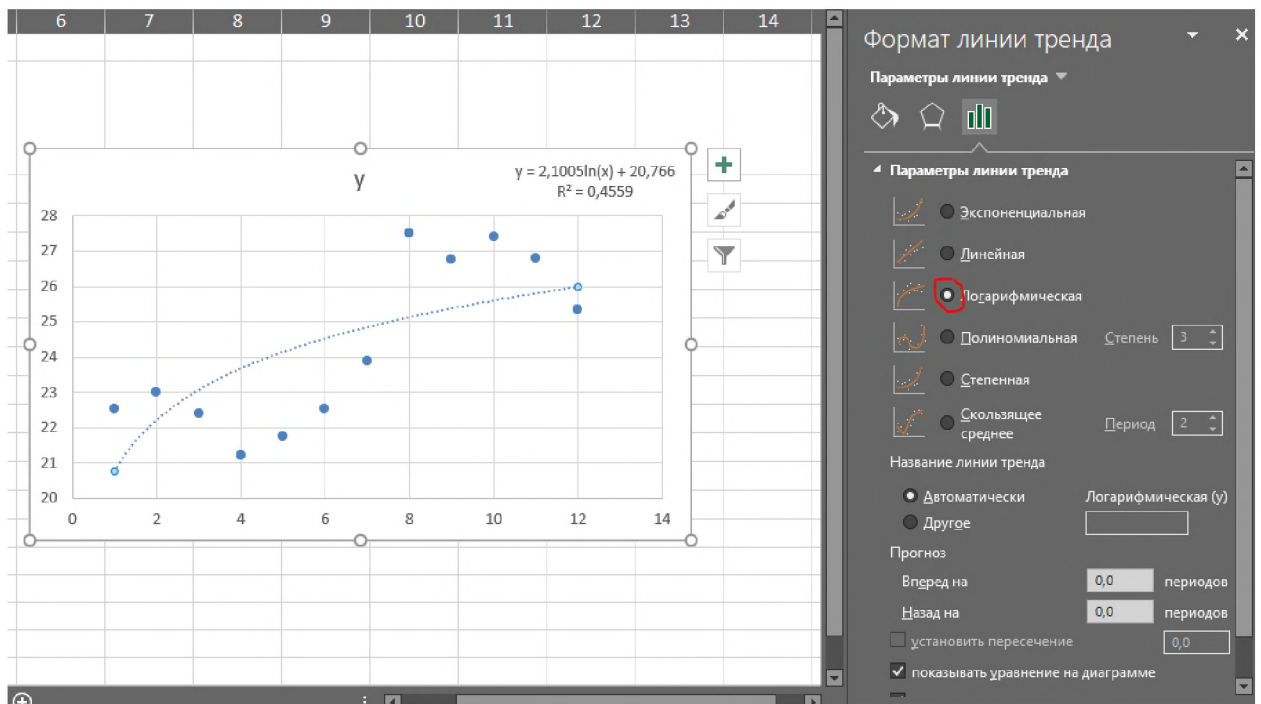
Получим функцию: $y_t = 26,379 + 3,5325 \cdot t + 0,7263 \cdot t^2 - 0,0365 \cdot t^3$; $R^2 = 0,8716$:



г) логарифмическая: $Y_t = a + b \ln t$.

Для оценки параметров логарифмической функции поставим отметку в поле построения линии тренда – «Логарифмическая».

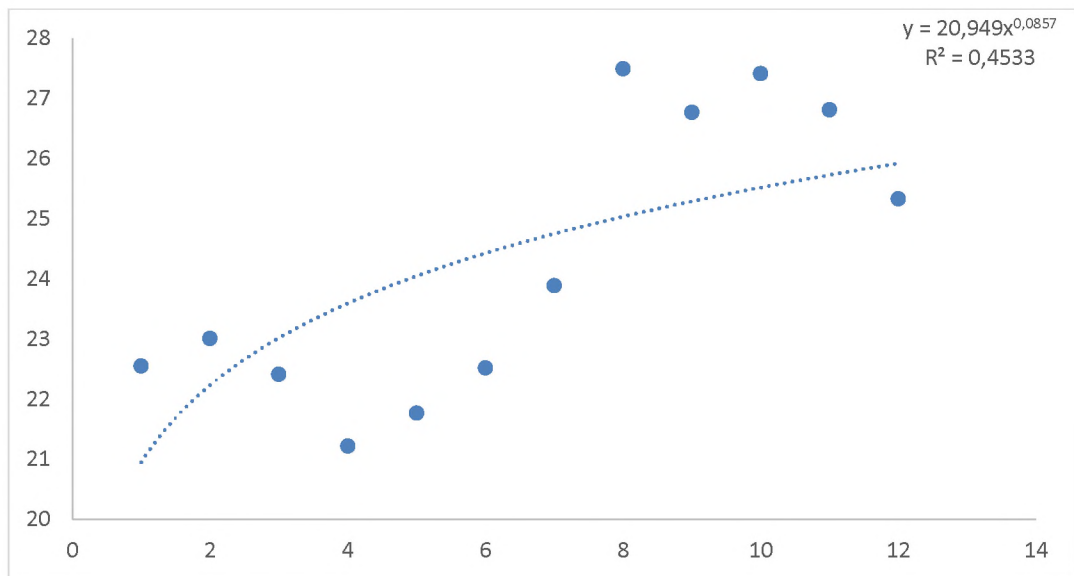
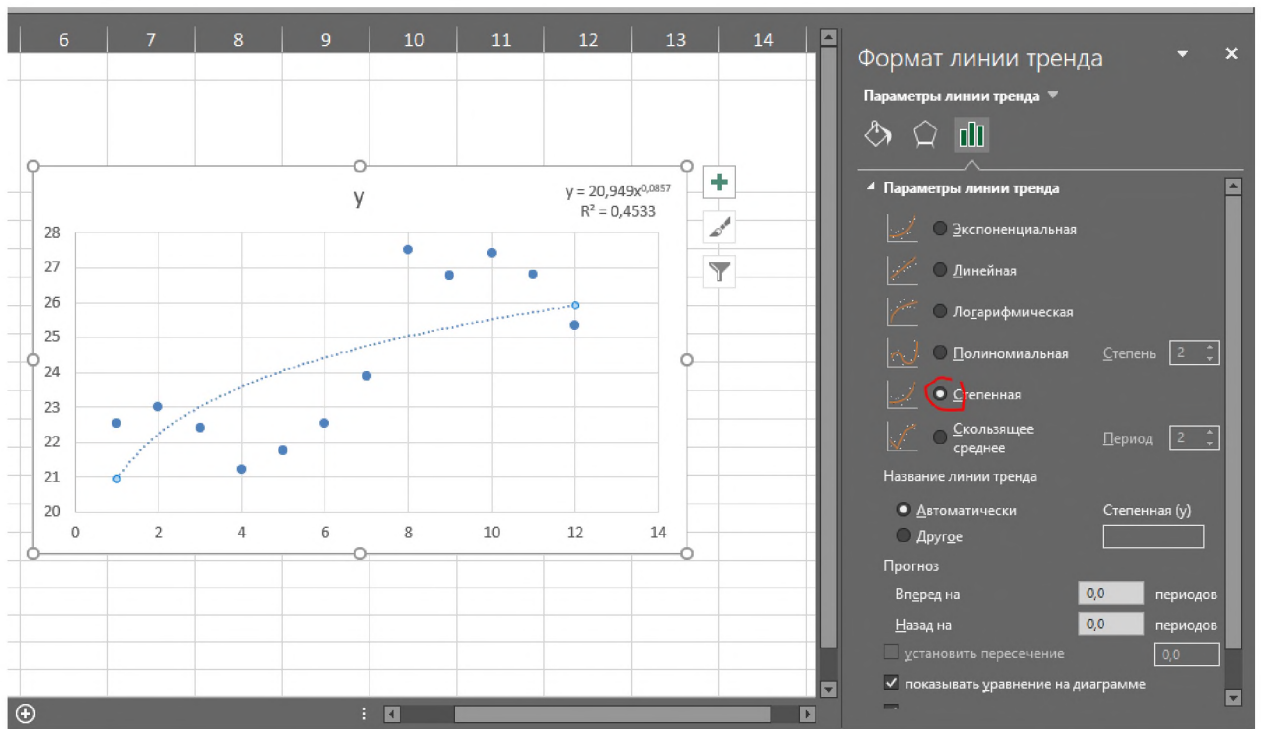
Получим функцию: $y_t = 20,766 + 2,1005 \cdot \ln t$; $R^2 = 0,4559$:



д) степенная: $Y_t = at^b$.

Для оценки параметров степенной функции поставим отметку в поле построения линии тренда – «Степенная».

Получим функцию: $y_t = 20,949 \cdot t^{0,0857}$; $R^2 = 0,4533$:

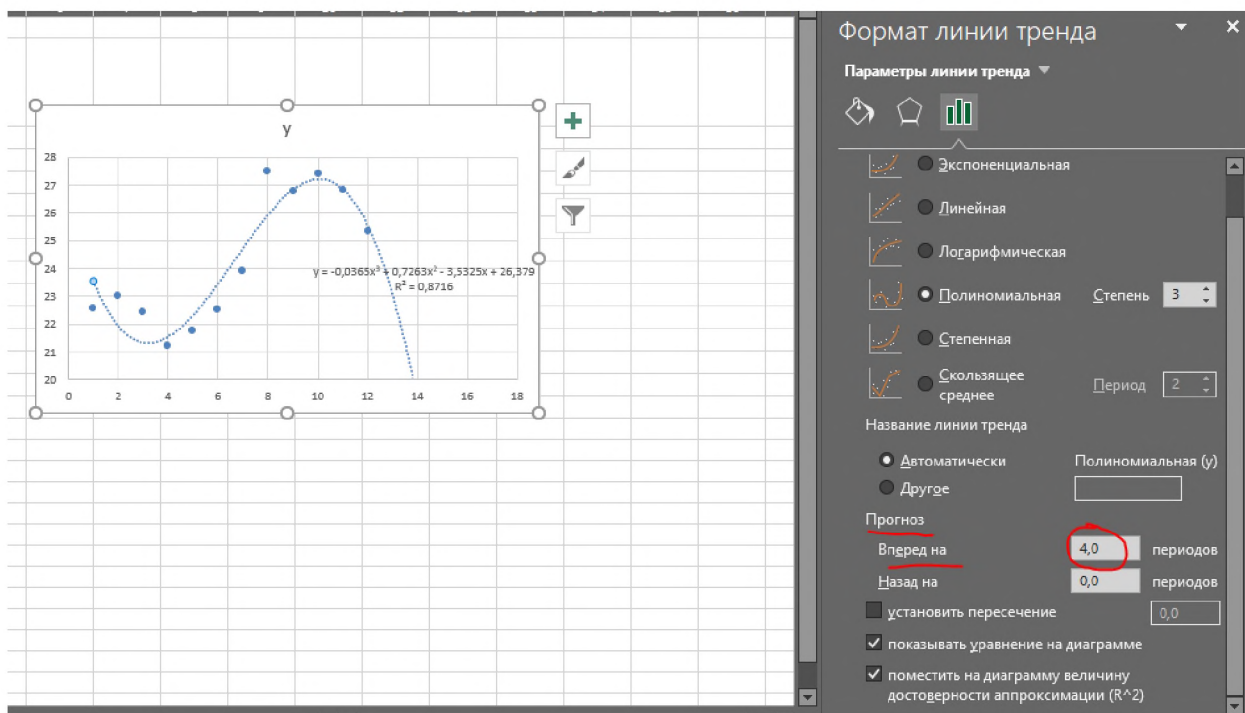


Построим сводную таблицу по полученным линиям тренда:

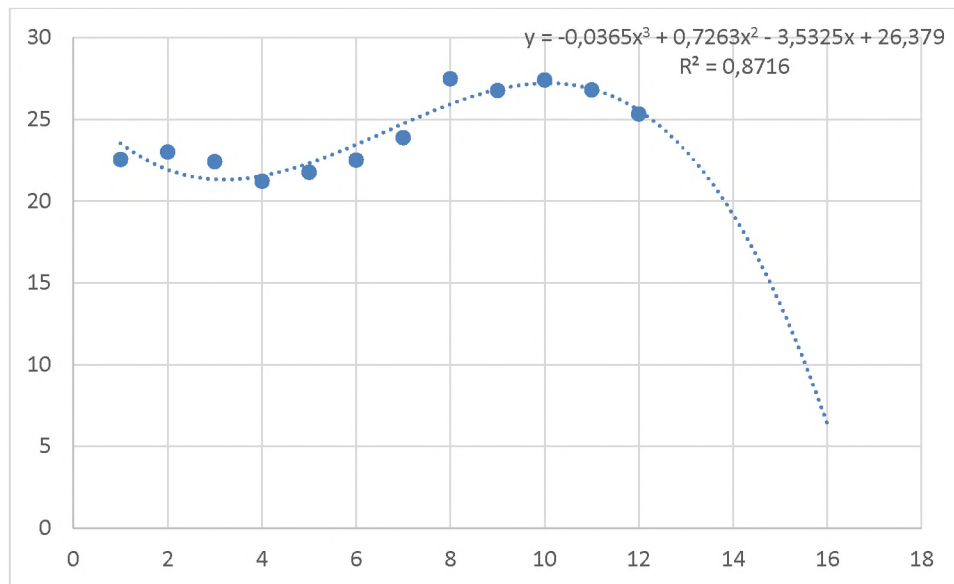
	Вид функции	Уравнение	R^2
а	Линейная	$y_t = 20,945 + 0,5107 \cdot t$	0,6132
б	Полиномиальная второй степени	$y_t = 21,4 + 0,3159 \cdot t + 0,015 \cdot t^2$	0,6182
в	Полиномиальная третьей степени	$y_t = 26,379 + 3,5325 \cdot t + 0,7263 \cdot t^2 - 0,0365 \cdot t^3$	0,8716
г	Логарифмическая	$y_t = 20,766 + 2,1005 \cdot \ln t$	0,4559
д	Степенная	$y_t = 20,949 \cdot t^{0,0857}$	0,4533

Из представленных уравнений следует максимальный коэффициент детерминации относится к полиному третьей степени. Попробуем оценить

прогнозные уровни этой функции на четыре квартала 2014 года. Предварительно это можно сделать визуально в диаграмме Excel:



Сбросив в настройках оси y минимальное значение на «0», увидим следующий предварительный прогноз:



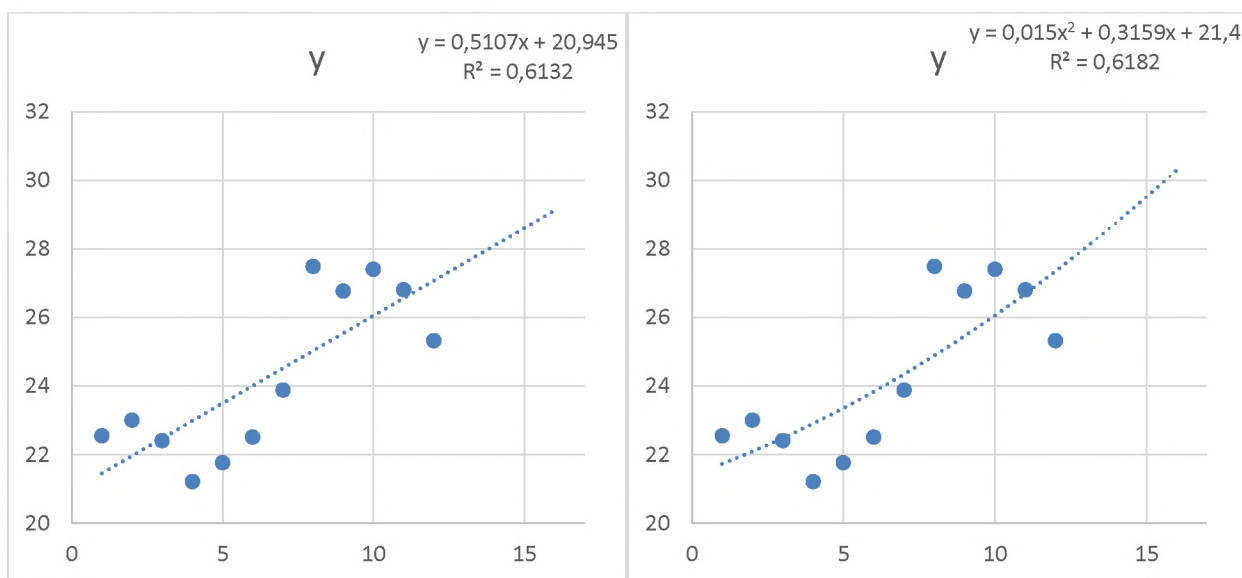
Таким образом, полиномиальная функция третьей степени позволяет прогнозировать потребительские цены на муку в Ставропольском крае к концу 2014 года на уровне примерно 6 рублей за 1 килограмм.

Опираясь на статистические меры корректности, следует признать это уравнение наиболее адекватным данному процессу. Однако, качественный анализ не позволяет предполагать такое снижение цен на муку.

Следует с осторожностью применять полиномы для прогнозирования, при этом для интерполяции они подходят, поскольку не выходят за рамки интервала исследования.

Исходя из вышеприведенных рассуждений, на этом этапе следует отказаться от применения полиномиальной функции третьей степени для прогнозирования.

Из оставшихся четырёх функций можно выбрать линейную или полиномиальную второй степени. Сравнительные предварительные прогнозы приведены на рисунках:



Коэффициенты детерминации функций примерно одинаковые, поэтому можно выбирать уравнение на усмотрение исследователя. При этом видно, что линейная функция показывает немногим меньший рост цен, чем полином второй степени.

Остановимся на линейной функции и перейдем ко второму этапу решения задачи.

Для оценки индексов сезонности используем формулу: $Is_i = \frac{y}{y_t}$,

где y – фактические уровни ряда; y_t – уровни, найденные по линии тренда.

Для дальнейших расчетов необходимо найти все уровни y_t . Для этого будем последовательно подставлять в полученное уравнение условные обозначения времени t от 1 до 12:

$$y_1 = 20,945 + 0,5107 \cdot 1 = 21,46$$

$$y_2 = 20,945 + 0,5107 \cdot 2 = 21,97$$

$$y_3 = 20,945 + 0,5107 \cdot 3 = 22,48$$

$$y_4 = 20,945 + 0,5107 \cdot 4 = 22,99$$

$$y_5 = 20,945 + 0,5107 \cdot 5 = 23,5$$

$$y_6 = 20,945 + 0,5107 \cdot 6 = 24,01$$

$$y_7 = 20,945 + 0,5107 \cdot 7 = 24,52$$

$$y_8 = 20,945 + 0,5107 \cdot 8 = 25,03$$

$$y_9 = 20,945 + 0,5107 \cdot 9 = 25,54$$

$$y_{10} = 20,945 + 0,5107 \cdot 10 = 26,05$$

$$y_{11} = 20,945 + 0,5107 \cdot 11 = 26,56$$

$$y_{12} = 20,945 + 0,5107 \cdot 12 = 27,07$$

Результаты запишем в таблицу 5.2.

Далее приступим к расчету индексов сезонности:

$$I_{S_{2011, \text{кв.1}}} = 22,55 / 21,46 = 1,051;$$

$$I_{S_{2011, \text{кв.2}}} = 23,01 / 21,97 = 1,048;$$

$$I_{S_{2011, \text{кв.3}}} = 22,41 / 22,48 = 0,997;$$

$$I_{S_{2011, \text{кв.4}}} = 21,22 / 22,99 = 0,923;$$

...

$$I_{S_{2013, \text{кв.4}}} = 25,33 / 27,07 = 0,936.$$

Результаты запишем в таблицу 5.2.

Индексы сезонности позволяют отметить, что в 1 квартале 2011 года фактический уровень цен на муку был выше линии тренда на 5,1%; в 1 квартале 2012 года – на 7,4% ниже линии тренда; в 1 квартале 2013 года – на 4,8% выше линии тренда. Однонаправленного сезонного отклонения в данном случае нет, но можно найти среднее отклонение, присущее первому кварталу. При этом следует использовать геометрическую среднюю величину.

Таблица 5.2 – Вспомогательная таблица

Год	Квартал	t	y	y_t	Is
2011	1	1	22,55	21,46	1,051
	2	2	23,01	21,97	1,048
	3	3	22,41	22,48	0,997
	4	4	21,22	22,99	0,923
2012	1	5	21,77	23,50	0,926
	2	6	22,52	24,01	0,938
	3	7	23,89	24,52	0,974
	4	8	27,49	25,03	1,098
2013	1	9	26,77	25,54	1,048
	2	10	27,41	26,05	1,052
	3	11	26,81	26,56	1,009
	4	12	25,33	27,07	0,936

Найдем средние значения индексов сезонности для каждого квартала по формуле средней геометрической:

$$\overline{Is}_i = \sqrt[3]{Is_{i, 2011} \cdot Is_{i, 2012} \cdot Is_{i, 2013}}$$

$$1 \text{ квартал: } \overline{Is}_1 = \sqrt[3]{Is_{1, 2011} \cdot Is_{1, 2012} \cdot Is_{1, 2013}} = \sqrt[3]{1,051 \cdot 0,926 \cdot 1,048} = 1,007$$

$$2 \text{ квартал: } \overline{Is}_2 = \sqrt[3]{Is_{2, 2011} \cdot Is_{2, 2012} \cdot Is_{2, 2013}} = \sqrt[3]{1,048 \cdot 0,938 \cdot 1,052} = 1,011$$

$$3 \text{ квартал: } \overline{Is}_3 = \sqrt[3]{Is_{3, 2011} \cdot Is_{3, 2012} \cdot Is_{3, 2013}} = \sqrt[3]{0,997 \cdot 0,974 \cdot 1,009} = 0,993$$

$$4 \text{ квартал: } \overline{Is}_4 = \sqrt[3]{Is_{4, 2011} \cdot Is_{4, 2012} \cdot Is_{4, 2013}} = \sqrt[3]{0,923 \cdot 0,098 \cdot 0,936} = 0,983$$

Итак, оба компонента определены. Приступим к прогнозированию.

Для прогнозирования тенденции на 4 квартала 2014 года продолжим условные обозначения времени t :

$$\text{Для 1 квартала 2014 года } t = 13; y_{13} = 20,945 + 0,5107 \cdot 13 = 27,58;$$

$$\text{Для 2 квартала 2014 года } t = 14; y_{14} = 20,945 + 0,5107 \cdot 14 = 28,09;$$

$$\text{Для 3 квартала 2014 года } t = 15; y_{15} = 20,945 + 0,5107 \cdot 15 = 28,61;$$

$$\text{Для 4 квартала 2014 года } t = 16; y_{16} = 20,945 + 0,5107 \cdot 16 = 29,12.$$

Соответственно, имеются прогнозные уровни для четырёх кварталов 2014 года по линии тренда и соответствующие этим кварталам индексы сезонности.

В соответствии с мультипликативной моделью тренда и сезонности:

$Y = Y_t \cdot I_s$ необходимо перемножить соответствующие компоненты:

$$Y_{\text{пр } 2014; \text{ кв.1}} = y_{13} \cdot I_1 = 27,58 \cdot 1,007 = 27,8;$$

$$Y_{\text{пр } 2014; \text{ кв.2}} = y_{14} \cdot I_2 = 28,09 \cdot 1,011 = 28,4;$$

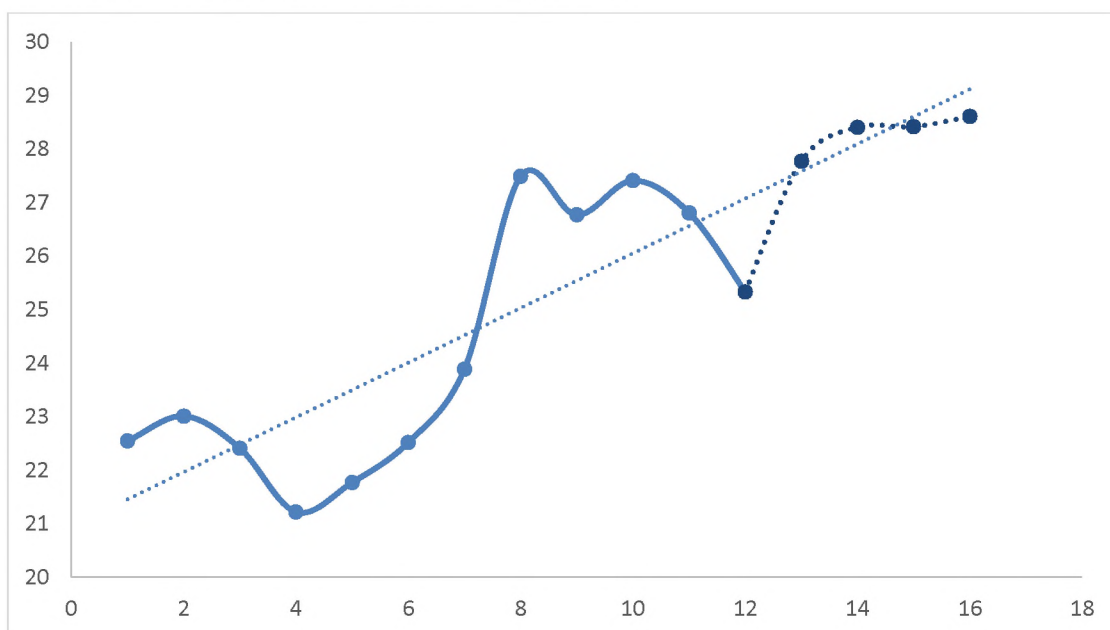
$$Y_{\text{пр } 2014; \text{ кв.3}} = y_{15} \cdot I_3 = 28,61 \cdot 0,993 = 28,4;$$

$$Y_{\text{пр } 2014; \text{ кв.4}} = y_{16} \cdot I_4 = 29,12 \cdot 0,983 = 28,6.$$

Результаты занесены в таблицу:

Год	Квартал	t	y_t	Средние I_s	Прогноз
2014	1	13	27,58	1,007	27,8
	2	14	28,09	1,011	28,4
	3	15	28,61	0,993	28,4
	4	15	29,12	0,983	28,6

Изобразим результаты на диаграмме:



В результате прогнозные уровни содержат возрастающую тенденцию и корректировку на сезонные колебания за период наблюдения.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 5.2. По данным о средних потребительских ценах на хлеб в Ставропольском крае за 2011-2013 гг. (таблица 5.3) оцените прогнозные уровни цен на 4 квартала 2014 г. Для этого постройте мультипликативную модель тренда и сезонности.

Выбор вида аппроксимирующей функции произведите на основании показателей детерминации из следующих функций:

а) линейная: $Y_t = a + bt$;

б) полиномиальная второй степени: $Y_t = a + bt + ct^2$;

в) полиномиальная третьей степени: $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$;

г) логарифмическая: $Y_t = a + b \ln t$;

д) степенная: $Y_t = at^b$.

Таблица 5.3 – Средние потребительские цены на хлеб пшеничный (1-2 с.),
руб./кг

Год	Квартал	Цены на хлеб пшеничный (1-2 с), руб./кг
2011	1	24,94
	2	26,26
	3	26,35
	4	26,42
2012	1	26,52
	2	26,55
	3	27,68
	4	29,11
2013	1	29,31
	2	29,8
	3	29,88
	4	29,85

Задача 5.3. По данным о средних потребительских ценах на макаронные изделия в Ставропольском крае за 2011-2013 гг. (таблица 5.4) оцените

прогнозные уровни цен на 4 квартала 2014 г. Для этого постройте мультипликативную модель тренда и сезонности.

Выбор вида аппроксимирующей функции произведите на основании показателей детерминации из следующих функций:

а) линейная: $Y_t = a + bt$;

б) полиномиальная второй степени: $Y_t = a + bt + ct^2$;

в) полиномиальная третьей степени: $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$;

г) логарифмическая: $Y_t = a + b \ln t$;

д) степенная: $Y_t = at^b$.

Таблица 5.4 – Средние потребительские цены на макаронные изделия, руб./кг

Год	Квартал	Цены на макаронные изделия, руб./кг
2011	1	48,31
	2	49,89
	3	49,69
	4	48,38
2012	1	41,8
	2	41,76
	3	43,01
	4	46,35
2013	1	42,89
	2	44,34
	3	43,11
	4	42,4

Задача 5.4. По данным о средних потребительских ценах на масло растительное в Ставропольском крае за 2011-2013 гг. (таблица 5.5) оцените прогнозные уровни цен на 4 квартала 2014 г. Для этого постройте мультипликативную модель тренда и сезонности.

Выбор вида аппроксимирующей функции произведите на основании показателей детерминации из следующих функций:

а) линейная: $Y_t = a + bt$;

б) полиномиальная второй степени: $Y_t = a + bt + ct^2$;

в) полиномиальная третьей степени: $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$;

г) логарифмическая: $Y_t = a + b \ln t$;

д) степенная: $Y_t = at^b$.

Таблица 5.5 – Средние потребительские цены на масло растительное, руб./кг

Год	Квартал	Цены на масло растительное, руб./кг
2011	1	84,06
	2	82,35
	3	80,03
	4	78,43
2012	1	78,58
	2	75,02
	3	75,58
	4	83,85
2013	1	82,01
	2	81,93
	3	79,98
	4	76,49

Задача 5.5. По данным о средних потребительских ценах на колбасные изделия в Ставропольском крае за 2011-2013 гг. (таблица 5.6) оцените прогнозные уровни цен на 4 квартала 2014 г. Для этого постройте мультипликативную модель тренда и сезонности.

Выбор вида аппроксимирующей функции произведите на основании показателей детерминации из следующих функций:

а) линейная: $Y_t = a + bt$;

б) полиномиальная второй степени: $Y_t = a + bt + ct^2$;

в) полиномиальная третьей степени: $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$;

г) логарифмическая: $Y_t = a + b \ln t$;

д) степенная: $Y_t = at^b$.

Таблица 5.6 – Средние потребительские цены на колбасные изделия (колбаса вар. 1 сорт), руб./кг

Год	Квартал	Цены на колбасные изделия (колбаса вар. 1 сорт), руб./кг
2011	1	172,41
	2	176,08
	3	182,92
	4	189,76
2012	1	176,34
	2	180,07
	3	184,59
	4	191,85
2013	1	169,54
	2	170,54
	3	171,19
	4	173,79

Задача 5.6. По данным о средних потребительских ценах на крупу гречневую в Ставропольском крае за 2011-2013 гг. (таблица 5.7) оцените прогнозные уровни цен на 4 квартала 2014 г. Для этого постройте мультипликативную модель тренда и сезонности.

Выбор вида аппроксимирующей функции произведите на основании показателей детерминации из следующих функций:

а) линейная: $Y_t = a + bt$;

б) полиномиальная второй степени: $Y_t = a + bt + ct^2$;

в) полиномиальная третьей степени: $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$;

г) логарифмическая: $Y_t = a + b \ln t$;

д) степенная: $Y_t = at^b$.

Таблица 5.7 – Средние потребительские цены на крупу гречневую, руб./кг

Год	Квартал	Цены на крупу гречневую, руб./кг
2011	1	106,31
	2	118,78
	3	106,56
	4	70,66
2012	1	54,74
	2	48,93
	3	45,3
	4	42,59
2013	1	37,37
	2	36,52
	3	35
	4	33,23

Задача 5.7. По данным о средних потребительских ценах на сахар-песок в Ставропольском крае за 2011-2013 гг. (таблица 5.8) оцените прогнозные уровни цен на 4 квартала 2014 г. Для этого постройте мультипликативную модель тренда и сезонности.

Выбор вида аппроксимирующей функции произведите на основании показателей детерминации из следующих функций:

а) линейная: $Y_t = a + bt$;

б) полиномиальная второй степени: $Y_t = a + bt + ct^2$;

в) полиномиальная третьей степени: $Y_t = a + bt + ct^2 + dt^3$;

г) логарифмическая: $Y_t = a + b \ln t$;

д) степенная: $Y_t = at^b$.

Таблица 5.8 – Средние потребительские цены на сахар-песок, руб./кг

Год	Квартал	Цены на сахар-песок, руб./кг
2011	1	41,78
	2	37,75
	3	35,04
	4	28,8
2012	1	28,91
	2	31,49
	3	32,68
	4	30,58
2013	1	30,23
	2	30,58
	3	31,21
	4	30,45